tersuchungen anknüpfen kann.[1]) Wirkliche Antinomien können hier nicht mehr auftreten, denn ein tatsächlicher Widerspruch in der Logik selbst ist undenkbar; scheinbare Widersprüche können nur durch Fehlschlüsse entstehen. Insbesondere verschwindet auch die Antinomie von der Menge aller Ordnungszahlen, sobald man sich an exakte Definitionen hält. Die genauere Ausführung führt aber hier zu weit auf rein mathematisches Gebiet.

1) Näheres hierüber findet sich in der Abhandlung: P. Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschrift 25 (1926) S. 683–713. Vergl. auch P. Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung 34 (1925) S. 143—155.

ENTGEGNUNG

Von HANS LIPPS-Göttingen

Die Ausführungen von Herrn Finsler sind m. E. keine Auflösung der Paradoxien. Sie sind nur ein neuer Versuch sie zu vermeiden durch die Aufstellung von neuen, widerspruchsfreien Begriffen. In den Paradoxien liegen aber nicht nur irgendwelche „offenbar (?) falsche Überlegungen" vor. Der Modus der zur Diskussion stehenden Argumentationen ist ein spezifischer. Das Besondere liegt in der durch eine Korrektur von Prämissen oder durch Einführung präzise definierter Prinzipien nicht wegzuschaffenden Stärke der Dialektik. Nicht nur, daß hier Thesis und Antithesis einander wechselseitig heraufführen — es fehlen „Prämissen"im strengen Sinn, die dann als illegitim dargetan werden könnten. Die Paradoxien sind keine bloßen Antinomien. Das Bestehen einer Antinomie könnte freilich als ein Beweis für irgendetwas in Anschlag gebracht werden. Z. B. als ein Beweis für die Unverträglichkeit der Prämissen zu den Überlegungen, die zur Thesis und – getrennt – aber ebenso zur Antithesis führten. Eine Antinomie kann einfach beseitigt werden. Eine Paradoxie ist aber nur dann „aufgelöst", wenn der Schein von Richtigkeit aufgedeckt und als bloßer Schein begriffen ist, der sie zu einer Paradoxie machte.

In der von Herrn Finsler anfangs erwähnten Arbeit bestritt ich, daß die Aussagbarkeit eines Wortes von sich selbst beztl. das sich-selbst-Enthalten einer Klasse eine diesen Worten beztl. Klassen gemeinsame Eigenschaft sei. Zu dem Wort KURZ könne nur kurz und zu einer Klasse M nur das Enthalten von M als Eigenschaft gehören. Nämlich als an diesen Dingen vorfindliche und ihre Natur ausmachende Eigenschaften. Dadurch, daß in dem einen Falle dem Wort eine Beschaffenheit inhäriere, die identisch ist mit dem, was dieses Wort bezeichnet, – oder daß im andern Falle das von der Klasse enthaltene Element identisch mit eben dieser Klasse ist, – dadurch seien die Inhärenz dieser Eigenschaft beztl. der Bezug der Klasse zu diesem einen unter ihren Elementen nicht in reflexivem Sinne modifiziert worden. Die Inhärenz einer Beschaffenheit sei ebensowenig in der Lage reflexiv affiziert zu werden wie die Beziehung einer Klasse zu ihren Elementen.

Es fehle also bei KURZ und DREISILBIG ebenso eine an diesen Worten auffindbare gemeinsame Eigentümlichkeit, wie sie fehlt bei den Klassen M und N, wenn M M und N N enthält. Die Reflexivität, d. i. das Besondere liege wo anders. Nämlich bei den Prädikationen. Daß M M und N N enthält, – beides kann man nur eben dahin ausdrücken, daß M und N „sich selbst enthalten".

Ein einfaches Beispiel einer tatsächlich reflexiven Beziehung wäre z. B. die Gleichheit einer mathematischen Größe mit sich selbst. Könnte hier diese Beziehung als eine besondere Beziehung anderen Gleichheitsbeziehungen gegenüber nicht festgehalten werden, so wäre der Ansatz dieser sich-selbst-Gleichheit als Axiom nicht möglich. Auf beiden Seiten einer solchen Gleichung steht dieselbe Zahl. Sofern es aber dieselbe Zahl ist, kann ich sie wohl vergleichen mit anderen Zahlen, z. B. ist dann 3 gleich mit 5. Nämlich darin, daß sie beide ungerade Zahlen sind. Diese prädikative Gleichheit, die immer eine Hinsicht voraussetzt, in der „Dinge" gleich sind, ist aber eine andere als die durch das Gleichheitszeichen angegebene. Das Gleichheitszeichen bezeichnet nicht etwa eine Gleichheit von Dingen hinsichtlich ihrer Größe. Daß man hierbei auf das Quantenhafte rekurriert, verkennt die Natur des Gleichheitszeichens. Weder dingliche Gleichheit, noch Identität der beiden Seiten ist darin formuliert worden. Es besagt nur, daß 3 ebenso in 3 transformiert werden kann wie in $2+1$ als in einen anderen mathematischen Ausdruck. Sofern ich mit 3 rechne, d. i. sofern diese Zahl also in einer Gleichung steht, steht sie unter einer andern Supposition als dann, wenn ich sie hinsichtlich ihrer Eigenschaften vergleiche mit andern Zahlen. Also scheint auch die hier in $3=3$ zum Ausdruck kommende Beziehung nicht eine Beziehung „der 3 auf sich selbst" zu sein. Denn die Reflexivität ersteht allererst unter einer Supposition, unter der es eben „dieselbe Zahl" ist, die auf beiden Seiten einer Gleichung steht, also unter einer Supposition, unter der sie gerade nicht in der Gleichung steht. Die Situation scheint also tatsächlich die nämliche zu sein, wie im Falle der Klasse, die sich selbst enthielt. Wo auch die sog. Beziehung der Klasse auf sich selbst nicht in reflexivem Sinne modifiziert werden konnte, sondern wo die Reflexivität von andersher, nämlich nur als eine Lesart von primär nicht reflexivem hereinkam. Demnach scheinen wir eines von beiden aufgeben zu müssen: Entweder das, daß die sich-selbst-Gleichheit einer Größe tatsächlich eine reflexive d. i. eigentümliche Beziehung ist. Oder das andere, daß das sich-selbst-Enthalten eines Begriffes oder einer Klasse keine reflexive Beziehung ist, daß wir es also hier – gerade entgegen dem oben gesagten – doch noch mit einer auszeichnenden Beziehung zu tun hätten. Womit die Paradoxie wieder entstehen müßte. Tatsächlich liegt aber in beiden Fällen Verschiedenes vor:

Was ist eigentlich damit gemeint, wenn wir sagten, daß im Falle eines sich selbst enthaltenden Begriffes die Reflexivität im Ausdruck läge? Doch zunächst nur das, daß eben die Reflexivität nicht in der Beziehung liegt, die gerade in Frage steht. Ebenso ist es aber bei $3=3$! Indessen: hier im letzteren Falle haben wir es zunächst einmal tatsächlich mit einer Beziehung zu tun, in die 3 zu 3 tritt. So sicher als es nicht (verschiedene!) Exemplare von 3 gibt, die dann nur dinglich, nämlich hinsichtlich ihrer Größe einander „gleich" sein könnten, ist doch 3 andererseits „iterierbar". Der Begriff beztl. die Klasse tritt aber zu demjenigen nicht in eine eigentliche „Beziehung", was zu ihm zufolge seines determinativen Bestandes gehört. Denn es ist nicht so, daß es einem Begriff eigentümlich wäre, das und jenes zu enthalten, sondern umgekehrt ist es den A B C eigentümlich alle zu y zu gehören, wenn y das den Begriff auszeichnende Merkmal ist. Sie sind das nämliche y. Das kann auch so gelesen werden, daß sie „zu y gehören". Ein „Begriff" bezw. eine Klasse kann nicht konstruirt werden. Sie entstehen durch bloße Definition. Und weil es eben deshalb unmöglich ist, sich ihrem automatischen Hervortreten zu entziehen, daraus entstand ja in unserm Falle das Peinliche der Paradoxie. Der Schein ihrer Unwiderlegbarkeit lag darin, daß in der reflexiven Formulierung sicherlich Eigenschaften (nur eben je andere) gemeint waren, zu denen sich die Klassen beztl. Worte entschieden hatten, die ihnen zukamen oder nicht zukamen, daß aber die reflexive Formulierung selbst keine M und N und dann „gemeinsame" Eigenschaft war. Ein Begriff beztl. eine Klasse kann als ein nur definiertes Gebilde nicht zweimal auftreten in dem Sinne wie die 3 zweimal in einer bestimmten Gleichung auftritt. Nämlich z. B. auch dann nicht, wenn dieser Begriff sich selbst enthält, d. i. wenn M auch gerade M ist. Eben darin, daß das zu einem Begriff zu gehören dasselbe ist wie das zu sein, was Merkmal dieses Begriffes ist, darin liegt einerseits das Peinliche, andererseits aber ebenso die Lösung der Paradoxie. Es ist sehr wohl möglich, daß ein Begriff sich selbst enthält. Z. B. der Begriff des Begriffes. Oder daß er nicht sich selbst enthält. Z. B. der Begriff des Baumes. Aber es ist unmöglich, daß das was hier als Relation des Begriffes zu dem, was er enthält, erscheint, durch Reflexivität eine Eigentümlichkeit bekäme, durch die dann ein anderer Begriff bezw. eine Klasse definiert würden, für welche die Zugehörigkeit zu sich selbst in Frage stehen könnte. Denn eine „Relation" des Begriffes zu dem was er selbst ist, d. i. zu dem was zu ihm gehört, liegt hierbei garnicht vor.

Die Klasse, zu deren Legitimität es genügt, daß sie durch eine echte Eigenschaft definiert ist, ist ein logisches Gebilde im Unterschied zu der Menge der Mathematik, die nicht nur durch eine „schärfere Umgrenzung" ausgezeichnet ist. Eine Klasse hat überhaupt keinen solchen Aufbau wie die Menge. Die eben nur zufolge dessen, daß sie ihn hat, auch dicht oder wohlgeordnet sein kann. Ein Inbegriff kann wohl in abstrakten Elementen „abgebildet", aber nicht dargestellt werden. Diese Darstellung einer Menge ist keine bloße Veranschaulichung, sondern eine zur Menge gehörige Seite, die eben dann zufolge ihrer Darstellbarkeit daraufhin untersucht werden kann, ob sie „abbildbar" ist in dem Sinne, wie die Mathematik von der Abbildung von Mengen spricht. Diese Abbildung, die geknüpft ist an die Darstellbarkeit als eine zur Natur der Mannigfaltigkeit gehörige Seite, ist etwas toto genere anderes als die Veranschaulichung eines Inbegriffs beztl. einer Klasse an einem konkreten Material, was konkretes Material bleibt, auch wenn man von der Natur der betr. Objekte abstrahiert.

Herr Finsler bemerkt: „Auch die Mengen sind auf gewisse Dinge als ihre Elemente bezogen, ohne eigentlich aus ihnen zu „bestehen". Denn es ist „ein wesentlicher Unterschied zwischen dem einen Ding der Menge, und den meist vielen Dingen ihrer Elemente." Wohl niemand bestreitet, daß eine Menge verschieden ist von ihren Elementen. Nämlich in dem Sinn, als dasjenige, was für die Mengen zutrifft, nicht zuzutreffen braucht für ihre Elemente. Das „aus den Elementen bestehen" hatte ich aber gegenüber gestellt dem lediglich intentionalen Bezug in dem Falle einer logischen Klasse, deren Elemente zufolge ihres prädikativen Bestandes automatisch von dieser durch einen Begriff „definierten" Klasse aufgegriffen sind. In dem Moment des Automatischen, d. i. darin, daß das Bestehen einer Klasse garantiert ist, wenn nur irgend ein Element da ist, was zu der Klasse gehört, lag gerade die dialektische Stärke der Paradoxie. Es ist bezeichnend, daß die Paradoxien nur gleichsam an der Peripherie der Mathematik auftreten. Im Bereiche der Mathematik, die konstruiert und in diesem Sinne „definiert", könnte es nur zu Antinomien, aber nie zu tatsächlichen Paradoxien kommen. Beztl. es ist von vornherein verfehlt, nach einem in den Paradoxien verborgenen „Zirkel" zu fahnden. Denn zirkelhaft kann nur eine konstruktive Definition sein, aber nimmermehr die Definition eines logischen Gebildes wie der Klasse. Deren automatisches Entstehen kann aber auch – das ist die Kehrseite – durch keinerlei Bedingungen eingeschränkt beztl. verhindert werden.

Eine solche Einschränkung ist aber anscheinend gerade dann erforderlich, wenn wir hier – nach diesen Erörterungen über die Differenz von tatsächlicher und nur scheinbarer Reflexivität – die Untersuchung der Klasse von Klassen, die sich nicht selbst enthalten, also dieses logischen und nicht mathematischen Gebildes, weiterführen. Herr Finsler entgegnet: „Wenn aber die Prädikationen eine gemeinsame Eigenschaft besitzen, so haben auch die Dinge, denen sie zugeordnet sind, eine gemeinsame Eigenschaft. Nämlich die, daß ihnen derartige Prädikationen zugeordnet sind." Sicherlich sind das keine zum konstitutiven Bestande dieser Dinge gehörigen Eigenschaften. Sie werden erst dadurch gewonnen, daß die Dinge in Prädikationen geraten. Und die Alternative, vor die man dann gestellt wird, ist deshalb auch eine andere. Es handelt sich nicht mehr um die Frage, ob einem Dinge etwas „ein für allemal" d. i. kategorisch als Eigenschaft zukommt oder nicht, sondern darum, ob das Ding vorkommt in einer Prädikation von bestimmter Eigenschaft oder nicht, d. i. aber recht besehen: Ob es – allgemein – eine Prädikation von bestimmter Eigenschaft gibt, in der das Ding vorkommt, oder ob es keine solche Prädikation gibt. Die Paradoxie ist dann darin gelegen, daß eine Prädikation dann gerade zufolge ihres Auftretens, d. i. zufolge ihrer Wahrheit sich selbst der Falschheit zu bezichtigen scheint.

An dieser Verknüpfung der Wahrheit einer Prädikation mit deren Auftreten als einer Formulierung von gewisser und gerade hier verhängnisvoller Beschaffenheit hat die Auflösung der Paradoxie einzusetzen: Der Satz, der zur Aussage gehört, ist keine Formulierung. Damit meine ich seinen Unterschied gegenüber z. B. einer algebraischen Formel. Als echte Formel kann diese richtig oder unrichtig sein. Richtigkeit und Unrichtigkeit sind sie auszeichnende Eigenschaften. Das sprachliche Gefüge des Satzes ist aber keine solche Darstellung, die eben deshalb, weil sie Darstellung wäre, an sich richtig oder unrichtig sein könnte. Sofern nämlich mit den Argumenten, algebraischen Symbolen oder Zahlen richtig darin operiert ist. Der sprachliche Satz ist aber weder richtig beztl. unrichtig, noch wahr oder falsch. Wahr oder falsch ist nur die Aussage, zu der er gehört. Und die hinwiederum nur in dem Sinne, als eben dasjenige wahr oder falsch ist „was ausgesagt wird." An anderer Stelle[1]) habe ich gezeigt, wie der trügerische Schein in der Paradoxie des Lügners gerade in der Erschleichung des Themas seiner Behauptung liegt, wenn er prätendiert, etwas über seine „Behauptungen" prädizieren zu können. Es ist nicht möglich zu sagen, daß die Wahrheit (bez. etwas, dem Wahrheit als Eigenschaft zukommt) durch eine Operation entsteht. Nur dann wäre aber die gedankliche Möglichkeit zu einem zirkelhaften Beginnen gegeben.

Aber sofern nun das Wortgefüge eines Satzes mögliches Thema der Aussage bleibt, zu der dieser Satz „gehört", – ist damit nicht die Möglichkeit eines Zirkels insofern gegeben, als der Fall eintreten kann, daß die Wahrheit einer Aussage einerseits über die Zugehörigkeit ihres Wortgefüges zu ihrem Triftigkeitsbereich entscheidet, andererseits aber doch wiederum ihre Wahrheit sich gerade an diesem Wortgefüge zu bewähren hat?

Was immer wieder verführt und verwirrt, ist die stillschweigende Annahme, daß der Triftigkeitsbereich einer allgemeinen Aussage mit einem von irgendher definierten Inbegriff bezw. einer Klasse zusammenfällt. Diese Voraussetzung ist falsch. Ebenso falsch als der Zweifel andererseits an der Legitimität der Klasse aller Sätze

1) Kantstudien XXVIII, S. 355 ff.

von gewisser Beschaffenheit, die zu einer wahren Prädikation gehören. So sicher als diese Klasse bereits durch irgendwelche ihrer Elemente, aber nicht erst durch alle Elemente definiert war und zu recht bestand, ist der Triftigkeitsbereich einer allgemeinen Aussage, d. i. sind deren Gegenstände als Gegenstand dieser Aussage überhaupt nicht „definiert". Sie werden einfach betroffen von der Aussage. Es ist keineswegs gewährleistet, daß man alle Elemente zu Gegenständen derselben allgemeinen Aussage machen kann. Die Definition einer Klasse vermittelt nicht ebenso automatisch den Bezug einer allgemeinen Aussage auf ihre Gegenstände. Daß diese „gegeben", d. i. da sein müssen – diese Feststellung wehrt kein Zirkel ab. Denn eine Aussage ist ja überhaupt nichts, was aufgebaut wäre aus Elementen und sich als Aussage dabei insofern nicht als Element im Voraus setzen könnte.

Während demnach die Stufentheorie auf Klassen angewendet eine durch nichts geforderte und willkürliche, d. i. eingebildete Schwierigkeiten nur vermeidende Einschränkung ist, vermeidet sie angewendet auf Aussagen einen Fehler, den zu begehen von vornherein garnicht möglich war. Daß die Gegenstände der Aussage da, d. i. gegeben sein müssen, besagt nichts anderes, als daß die Aussage sich auf nichts anderes beziehen kann als auf dasjenige, dessen so und so Sein doch recht besehen gerade ihre Wahrheit ist. Und wenn man in dem diskutierten Falle überhaupt einen Zirkel angeben will, so könnte er nur in dem vergeblichen und darum nicht erst abzuwehrenden Versuche liegen, irgend etwas bestimmtes zum Gegenstand dieser Aussage zu machen.

Zu der Paradoxie von der endlichen Bezeichnung gibt Herr Finsler die Erklärung, daß die Definition „erste nicht endlich darstellbare Zahl" tatsächlich diese Zahl nicht endlich darstelle. Denn die Definition verlange, wenn sie in endlicher Darstellung gegeben wird, von der zu definierenden Zahl etwas Unmögliches, nämlich, daß sie einerseits nicht zu den endlich darstellbaren Zahlen gehört, andererseits aber durch die gegebene Darstellung doch endlich dargestellt sein soll. Einer solchen Definition könne aber keine Zahl genügen. „Wird jedoch die Definition rein gedanklich gefaßt, aber daß sie als solche nicht in endlicher Darstellung vorliegt, so ist sie einwandfrei und gegen die Existenz der betroffenen Zahl ist nichts einzuwenden." – Verlangte die Definition tatsächlich Unmögliches, so würde durch die Erkenntnis dieser Unmöglichkeit die Paradoxie nicht gelöst werden. Sie entsteht ja gerade dadurch, daß diese Definition durchaus legitim entwickelt ist. Daran ist keine Korrektur möglich. Aber man muß bemerken, wie die „Definition" in endlich vielen Worten eine Darstellung dieser Zahl derart, wie sie in der Einführung der Paradoxie als legitime Eigenschaft tatsächlich auftat, nämlich in endlich vielen Ziffern oder Zeichen, überhaupt nicht ist. Es liegt kein Anlaß vor auf die Fixierung der Definition in Worten zu verzichten und sich mit einer bloß „gedanklichen Fassung" (?) zu begnügen. Dieser Verzicht auf die Aktualisierung desjenigen, dessen Möglichkeit ja doch genügte, um die Paradoxie entstehen zu lassen, wäre aber doch überdies kein Ausweg, wenn wir schließlich davon absehen, daß er einem Verzicht auf die Behandlung der Paradoxie gleich käme.

Nach Herrn Finsler sind die Paradoxien ein Beweis für die „Unmöglichkeit, von Eigenschaften" zu sprechen, ohne sie im Hinblick auf einen vorliegenden Bereich von Dingen definiert zu haben. Sie haben nur in soweit einen Sinn, als die Definition einen Sinn gibt. Und das träfe z. B. zu für die Eigenschaften autologisch und heterologisch bei den Worten KURZ und LANG. Aber nicht mehr bei AUTOLOGISCH und HETEROLOGISCH selbst. – Daß die fragliche Eigenschaft bei KURZ und LANG einen „Sinn" hat, bedeutet nur, daß man von dem einen tatsächlich sagen kann, daß es von sich selbst ausgesagt wird, sofern es nämlich kurz ist. Und daß es bei dem andern nicht der Fall ist, wenn es ebenso kurz ist. Mehr meint aber Herr Finsler wohl auch garnicht. Denn er spricht lediglich von der „Bedeutung" von „autologisch", die nicht nur in gewissen einzelnen Fällen, sondern in Bezug auf das Wort AUTOLOGISCH selbst schon bekannt sein müßte, wenn man entscheiden wollte, ob sie „zukommt" oder nicht zukommt. Was hier als strenge Definition der Eigenschaft bezeichnet wird, ist die strenge Definition eines Falles, zu dessen strenger Definition es genügend ist, wenn er nur dem formalen Schema genügt: Es ist so, beztl. nicht so. Es kommt dabei nur darauf an, daß z. B. die Aussagbarkeit-von-sich-selbst irgend einen Sinn hat, d. i. daß irgend etwas damit gemeint ist. Wobei es aber gleichgültig ist, was in re damit gemeint ist. D. i. des näheren, ob dabei tatsächlich einem Dinge eine Eigenschaft zugesprochen wird, oder ob in der Behauptung nur eine Tatsache fixiert ist, derart z. B., daß etwas gerade in Bezug auf eine vorliegende Prädikation von sich selbst ausgesagt wird, oder ob die Aussage – im Falle der von-sich-selbst-Aussagbarkeit – der Form nach allgemein ist. Dabei bleiben also gerade die oben fixierten logisch-formalen Differenzen unbeachtet, deren Nichtbeachtung die Paradoxien zur Entwicklung bringen und deren Konfusion dann als Fehler in der Definition eines gewissen sachlichen Prädikates erscheint. Die Untersuchung von Herrn Finsler hat ihren Ansatz an der Stelle, wo die paradoxe Argumentation endet. Darin aber, wie Herr Finsler an der dialektischen Einleitung des Widerspiels von Thesis und Antithesis vorbeigeht, dieses Widerspiel als etwas in sich selbst stehendes nimmt und notgedrungen dann den so gelegen kommenden Zirkel für die Entstehung eines Widerspruchs verantwortlich macht, ohne die Genese der Paradoxie mit den darin verwobenen Motiven zu untersuchen, sehe ich nur ein Ausweichen vor der Materie des gerade in den Paradoxien indizierten Gebietes. Das ist kein Einwand gegen den Mathematiker. Ein solcher könnte nur erhoben werden gegen die Prätention, die Paradoxien durch Korrekturen von Definitionen usw. tatsächlich erledigen zu können.